# Sesión Especial 21

# Métodos Homotópicos en Álgebra, Geometría y Topología

## Organizadores

- Urtzi Buijs Martín (Universidad de Málaga)
- Antonio Díaz Ramos (Universidad de Málaga)

## Descripción

El objetivo de esta sesión especial es poner de relieve el reciente y exitoso uso de métodos de la teoría de homotopía en una amplia lista de líneas de investigación en Álgebra, Geometría y Topología. Problemas profundos de muy distinta naturaleza, incluyendo temas relacionados con la teoría de trenzas, infinito categorías de distinta índole, teoría de grupos, productos topológicos de orden superior, etc., han sido resueltos mediante el uso de estos métodos homotópicos.

Para ello hemos escogido un amplio espectro temático con nexo común homotópico y un grupo de jóvenes y excelentes conferenciantes con la tarea de hacer sus charlas accesibles.

Esta sesión especial va dirigida a una audiencia heterogénea y pretendemos aglutinar geómetras, algebristas, expertos en sistemas dinámicos o en análisis no lineal, interesados en las novedosas aplicaciones de métodos homotópicos en sus respectivas áreas.

## Programa

Martes, 5 de febrero (mañana)

| | |
|---|---|
| 11:30 – 12:00 | María José Pereira Sáez (Universidade da Coruña)<br>*La transformada de Cayley en Grupos de Lie, Espacios Simétricos y variedades de Stiefel.* |
| 12:00 – 12:30 | David Méndez (Universidad de Málaga)<br>*El problema de realización de grupos y la categoría de flechas* |
| 12:30 – 13:00 | Ramón Flores (IMUS, Universidad de Sevilla)<br>*Baum-Connes para una extensión del grupo especial lineal* |
| 13:00 – 13:30 | Marithania Silvero (Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea)<br>*Extreme Khovanov spectra* |

MARTES, 5 de febrero (tarde)

| | |
|---|---|
| 17:00 – 17:30 | Oihana Garaialde Ocaña (Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco)<br>*Applications of group cohomology* |
| 17:30 – 18:00 | Cristina Costoya (Universidade da Coruña)<br>*Topología tórica y grupos de autoequivalencias* |
| 18:00 – 18:30 | José Manuel Moreno (Max Planck Institute for Mathematics)<br>*$A_\infty$-álgebras y productos de Massey* |
| 18:30 – 19:00 | Jaime Sánchez Gabites (Universidad Autónoma de Madrid)<br>*Series infinitas en cohomología y sus aplicaciones en dinámica* |

---

## Topología tórica y grupos de autoequivalencias

CRISTINA COSTOYA

Universidade da Coruña

cristina.costoya@udc.es

***Resumen.*** Las técnicas de topología tórica nos permiten construir funtorialmente espacios topológicos asociados a complejos simpliciales abstractos. Por su naturaleza combinatoria, estas construcciones (complejos de momento angular y más generalmente productos poliedrales) son candidatas para la resolución del problema de Kahn de realizabilidad de grupos: a saber, si todo grupo $G$ es el grupo de autoequivalencias de un espacio topológico.
En esta charla exploramos esta línea de investigación, especializándonos en el producto poliedral de espacios clasificadores de grupos de Lie. En particular, nos centraremos en el caso de productos poliedrales de $BS^3$, espacio homotópicamente rígido, y demostraremos resultados encaminados a la resolución del problema de Kahn sobre los enteros.

---

## Baum-Connes para una extensión del grupo especial lineal

Ramón J. Flores

IMUS, Universidad de Sevilla

cluje28@gmail.com

***Resumen.*** En esta charla mostraré como calcular la homología de Bredon del producto semidirecto estándar de un grupo abeliano libre en dos generadores por el grupo $SL(2, \mathbf{Z})$. Como consecuencia, se obtendrá el lado izquierdo del isomorfismo de Baum-Connes para este grupo.

---

## Series infinitas en cohomología y sus aplicaciones en dinámica

Jaime Sánchez Gabites

Universidad Autónoma de Madrid

jaimej.sanchez@uam.es

***Resumen.*** Supongamos que $K$ es un atractor estable para un sistema dinámico continuo (un flujo) con región de atracción $\mathcal{A}(K)$. Un resultado clásico afirma que la inclusión $K \subseteq \mathcal{A}(K)$ induce isomorfismos en cohomología de Čech en todas las dimensiones. La demostración hace un uso esencial del flujo para construir ciertas homotopías, de modo que es natural preguntarse si el resultado es aún válido cuando la dinámica es discreta; es decir, está generada por un homeomorfismo $f$. En general la respuesta es negativa, aunque puede probarse que el resultado sigue siendo cierto si el espacio de fases es una variedad y los coeficientes se toman en un cuerpo. Sin embargo, por razones que explicaremos en la charla, sería interesante poder considerar espacios de fases más generales; de hecho, casi arbitrarios.
En la charla abordaremos esta pregunta mediante una técnica introducida por L. Hernández Corbato, F. R. Ruiz del Portal, y el conferenciante. Dada una serie formal de potencias en $f^*$, mostraremos cómo esta puede interpretarse como un endomorfismo del grupo de cohomología $\check{H}^*(\mathcal{A}(K), K)$. Explotando esta posibilidad de sumar series en cohomología podremos deducir información acerca del endomorfismo inducido $f^*$ y, de hecho, acerca del propio grupo $\check{H}^*(\mathcal{A}(K), K)$. Puesto que nuestros argumentos serán puramente algebraicos y no geométricos (en particular, no necesitaremos construir ninguna homotopía), son de aplicación en espacios de fases muy generales y nos permitirán dar una solución parcial a la pregunta formulada arriba.

---

## Applications of group cohomology

Oihana Garaialde Ocaña

Universidad del País Vasco

oihana_alkiza@hotmail.com

***Abstract.*** The aim of this talk is to outline some applications of group cohomology (essentially) in group theory. Group cohomology can be thought of as an obstruction, a concept introduced originally in homotopy theory (Eilenberg obstruction theory). Roughly speaking, cohomology vanishes when the problem under study has a positive answer. We shall briefly mention some of such examples. In this talk, group cohomology will be used to study two, in a sense, opossite problems: (a) to 'cluster' infinite families of finite $p$-groups that have a common intrinsic algebraic property, say, the nilpotency class or the coclass, where $p$ is a fixed prime number. Recall that a finite p-group of size $p^n$ and nilpotency class $m$ has coclass $n-m$. (b) to count the number of isomorphism types of finite $p$-groups. The second cohomology group classifies central extensions of groups (up to some notion of 'equivalence'). Unfortunately, isomorphic groups may give rise to nonequivalent extensions and thus, we can over-count the number of isomorphism types just by looking at the second cohomology group. We introduce the notion of 'strong isomorphism' of groups to partially overcome the aforementioned issue.

---

## El problema de realización de grupos y la categoría de flechas

David Méndez

Universidad de Málaga

david.mendez@uma.es

***Resumen.*** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $G$ un grupo. ¿Existe algún objeto $X$ de $\mathcal{C}$ cuyo grupo de automorfismos sea $G$? Este problema, conocido como el problema de realización de grupos, ha sido y continúa siendo estudiado en diversas categorías. Por ejemplo, en la categoría de homotopía de espacios punteados fue propuesto por Kahn en los años 60, y ha sido resuelto en el caso de grupos finitos y de manera muy reciente por Costoya y Viruel.

En esta charla hablaremos del problema de realización de grupos en la categoría de flechas de una categoría $\mathcal{C}$, donde los objetos son los morfismos o flechas $f\colon A \to B$ de $\mathcal{C}$ y los morfismos entre dos flechas son pares de morfismos en $\mathcal{C}$ que forman un cuadrado conmutativo. Esta categoría permite enunciar un problema de realización generalizado: fijada $\mathcal{C}$ una categoría y dados $G_1$, $G_2$ y $H \leq G_1 \times G_2$ grupos, ¿existe algún morfismo $f\colon A_1 \to A_2$ en $\mathcal{C}$ de forma que $\mathrm{Aut}(A_i) = G_i$ y $\mathrm{Aut}(f) = H$? Veremos cómo construir una solución a este problema en la categoría de grafos y, utilizando técnicas análogas a las de Costoya y Viruel, cómo trasladar dicha solución a la categoría homotópica de espacios punteados.

Trabajo conjunto con Cristina Costoya y Antonio Viruel.

---

### $A_\infty$-álgebras y productos de Massey

José Manuel Moreno

Max Planck Institute for Mathematics

morenofdezjm@gmail.com

***Resumen.*** La cohomología de un álgebra diferencial graduada encierra estructuras extra que van más allá del producto cup. Estas estructuras extra son sutiles, y suele haber tecnicismos y dificultades en su construcción. Sin embargo, son extremadamente poderosas. Hay contextos en los que estas estructuras permiten una clasificación completa de ciertos tipos de homotopía. Cuando menos, ayudan a distinguir tipos de homotopía cuando el producto cup no basta. También tienen importantes aplicaciones fuera del contexto puramente homotópico. Dos ejemplos de este tipo de estructura extra son los productos de Massey y las $A_\infty$-álgebras.
En esta charla, veremos que los clásicos productos de Massey están relacionados con las $A_\infty$ estructuras, pero de una forma más sutil de lo que a priori parece.

Joint work with U. Buijs and A. Murillo.

---

### La transformada de Cayley en Grupos de Lie, Espacios Simétricos y variedades de Stiefel.

María José Pereira Sáez

Universidade da Coruña

maria.jose.pereira@udc.es

***Resumen.*** La transformada de Cayley clásica es una manera de expresar una matriz ortogonal mediante coordinadas antisimétricas. En el caso de los grupos ortogonales es una construcción bien conocida con aplicaciones en campos tan variados como análisis complejo y álgebra lineal o computación, física y biología. Veremos cómo construir la transformada de Cayley en grupos de Lie, espacios simétricos y variedades de Stiefel. Comentaremos algunas aplicaciones de esta construcción al cálculo de invariantes homotópicos como la categoría LS o la complejidad topológica, la teoría de Bott-Morse y algoritmos de optimización.

Trabajo conjunto con E. Macías-Virgós (U. Santiago de Compostela) y D. Tanré (U. Lille 1).

---

**Extreme Khovanov spectra**

Marithania Silvero

Universidad del País Vasco

marithania.silvero@ehu.eus

***Abstract.*** Khovanov homology is a powerful link invariant introduced by Mikhail Khovanov in 2000 as a categorification of the Jones polynomial. A decade later, Lipshitz and Sarkar constructed a family of spectra refining Khovanov homology, and they proved that its stable homotopy type is a link invariant. Independently, in a joint work with González-Meneses and Manchón, we introduced a simplicial complex whose cohomology equals the extreme Khovanov homology of a given link diagram.
In this talk we show that both constructions are stably homotopy equivalent at the extreme quantum grading.

Joint work with Federico Cantero Morán.